

基于 Newton 迭代算法的低复杂度信号检测算法

刘刚, 娄增进, 林勤华, 郭漪

(西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

摘 要: 为了解决太赫兹通信系统超大规模 MIMO 检测计算复杂度高、收敛速度慢等问题, 提出了基于 Newton 迭代算法的低复杂度信号检测算法。通过在 Newton 迭代算法中改进初始矩阵、加入步长因子, 降低计算复杂度、提高收敛速度; 通过加入调节因子, 保证算法的稳定性、可靠性和场景适用性。仿真结果表明, 相比传统算法, 所提算法具有更低的计算复杂度和更快的收敛速度。当迭代次数为 3 次时, 即可逼近 MMSE 算法性能。

关键词: 太赫兹通信; 超大规模 MIMO; 信号检测; 步长因子

中图分类号: TN929.5

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2022035

Low complexity signal detection algorithm based on Newton iterative algorithm

LIU Gang, LOU Zengjin, LIN Qinhu, GUO Yi

State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China

Abstract: In order to solve the problems of high computational complexity and slow convergence rate of ultra-massive MIMO detection in terahertz communication system, the low complexity signal detection algorithm based on Newton iterative algorithm was proposed. By improving the initial matrix and adding step factor in Newton iteration algorithm, the complexity of the algorithm was reduced, and the convergence speed was increased. By adding adjusting factors, the stability and reliability of the algorithm were guaranteed, and the applicability of the algorithm was also increased. Simulation results show that the proposed algorithm have lower computational complexity and faster convergence speed compared with traditional schemes. When the number of iterations is three, the detection performance is close to MMSE algorithm.

Keywords: terahertz communication, ultra-massive MIMO, signal detection, step factor

0 引言

超大规模多输入多输出 (MIMO, multiple-input multiple-output) 技术是 6G 太赫兹通信系统^[1]重要的组成部分, 它不仅使通信系统更加可靠, 还可以扩大通信系统容量。然而 6G 系统中^[2], 天线阵列中将会放置上万个天线单元^[3], 从而使 MIMO 系统接收端的计算复杂度令人难以承受。采用超大型天线阵列的分组和控制技术, 可将天线阵列拆分成多个组别^[4], 减少阵列中天线的单元数目, 使传统 MIMO

信号检测算法得以应用。

大规模 MIMO 技术能够充分利用空间资源, 大幅提高系统的频谱利用率与能量效率, 而天线数目的大量增加也使系统的容量得以提高^[5]。在大规模 MIMO 信号检测领域已有大量研究成果, 这些成果在计算复杂度、检测性能、算法收敛速度等方面有很大贡献。Jiang 等^[6]提出了一种基于 Jacobi 的迭代算法; Gao 等^[7]提出了一种基于 Richardson 算法的检测算法。相比最小均方误差 (MMSE, minimum mean square error) 算法, 这 2 种算法的计算复杂度

收稿日期: 2021-11-16; 修回日期: 2022-01-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62171354, No.61871387, No.61861041, No.61871471)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.62171354, No.61871387, No.61861041, No.61871471)

较低, 但存在收敛速度慢的弊端。Bakulin 等^[8]对线性方程进行了变换, 避开了高维矩阵求逆运算, 算法复杂度有所下降, 但需要 12 次迭代才能取得较好性能。Zhu 等^[9]提出了一种基于 Neumann 级数展开的检测算法, 通过级数展开近似矩阵求逆结果, 该算法由于具有较低复杂度, 得到了广泛的应用。但是该算法在展开阶数大于或等于 3 时, 计算复杂度高于矩阵求逆。Björck^[10]提出了一种利用松弛因子加速迭代的方法。Gao 等^[11]提出了一种最优松弛因子的超松弛迭代算法。Zhang 等^[12]提出了改进对称超松弛迭代算法, 经由数次迭代后即可得到较好的检测性能, 但是由于系统收发端天线数目对算法性能影响很大, 适用场景受到很大限制。Jin 等^[13]提出了一种基于 Newton 迭代的信号检测算法, 获得了较快的收敛速度, 检测精度也较高, 但是过多的矩阵乘法运算带来较高的计算复杂度。Chataut 等^[14]基于近似消息传递 (AMP, approximate message passing) 算法, 提出了一种低复杂度 MIMO 检测算法, 提高了 MIMO 检测精度, 但是通常需要 6~8 次迭代才能接近 MMSE 算法性能, 收敛速度受限。

本文在太赫兹场景下, 提出了基于 Newton 迭代的低复杂度信号检测算法。通过改进迭代初值、加入步长因子、加入调节因子等操作, 降低了算法的计算复杂度, 加快了算法的收敛速度, 保证了算法的稳定性。算法可工作在 $\theta \neq 0$ 和 $\theta = 0$ 这 2 种模式。当 $\theta \neq 0$ 时, 经历 3 次迭代即可达到 MMSE 算法性能; 当 $\theta = 0$ 时, 需要 4 次迭代才能达到 MMSE 算法性能, 但是复杂度大大降低, 尤其适于处理数据量大、实时性要求不高的场景。

1 理论基础

1.1 系统模型

假设 MIMO 系统包含 N 个接收天线、 K 个发射天线, $N \gg K$, 系统模型如图 1 所示。

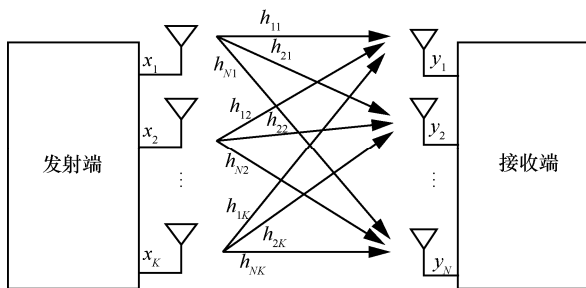


图 1 MIMO 系统模型

MIMO 系统接收信号可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_K)^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ 表示发射信号, x_k 为第 k 根发射天线信号; $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 表示接收信号, y_k 为第 k 根接收天线信号; $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_K) \in \mathbb{C}^{N \times K}$ 表示信道衰落矩阵, $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iN})^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$, $h_{m,n}$ 为第 n 个发射天线与第 m 个接收天线之间的衰落信道增益, 且服从 $h_{m,n} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ 表示加性白高斯噪声, n_i 的均值为 0, 方差为 σ_n^2 。这里假设信号经历平坦衰落信道。

对接收信号进行 MMSE 检测, 可得

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{y} \quad (2)$$

其中, $\hat{\mathbf{x}}$ 表示发射信号矢量估计值。

若令 $\mathbf{b} = \mathbf{H}^H \mathbf{y}$ 表示匹配滤波器, $\mathbf{A} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-1}$ 表示 MMSE 滤波矩阵, 则式(2)可以重写为

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (3)$$

其中, \mathbf{A}^{-1} 的计算复杂度为 $O(K^3)$ ^[15]。

1.2 迭代算法基本思想

迭代算法基本思想是将 \mathbf{A} 分解成 $\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$ 的形式^[16], 其中 \mathbf{P} 是非奇异的, 迭代公式为

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{f} = \mathbf{P}^{-1}(-\mathbf{Q}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{B} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_K - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$, $\mathbf{f} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$, k 为迭代次数。当满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0}$ 时, 迭代收敛。假设初始估计 $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$, 则第 k 次迭代结果可以表示为

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{P}^{-1}((\mathbf{P} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A})^i \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} \quad (5)$$

1.3 Newton 迭代算法

令 \mathbf{X}_0 是 \mathbf{A}^{-1} 的初始估计, 则第 k 次 Newton 迭代可以写成^[17]

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1}) \quad (6)$$

当满足 $\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{X}_0\| < 1$ 时, 实现收敛。因为 Newton 迭代算法为二次收敛, 所以它的计算复杂度仅取决于迭代次数。文献[16]指出, Newton 迭代算法 k 次迭代的结果与基于 Neumann 级数展开的算法中 $2^k - 1$ 次迭代的结果相同。因此, 在相同的系统配置下, Newton 迭代算法要比其他的迭代算法具有更快的收敛速度。

2 低复杂度 MIMO 检测算法

本文基于 Newton 迭代算法进行 MIMO 检测。通过改进初始矩阵来降低算法复杂度，提高了算法收敛速度；通过加入步长因子，大幅度提高了算法收敛速度，之后又通过加入调节因子保证了算法的稳定性和可靠性。基于 Newton 迭代算法的低复杂度信号检测（调节因子 $\theta \neq 0$ ）如算法 1 所示。

算法 1 基于 Newton 迭代算法的低复杂度信号检测（调节因子 $\theta \neq 0$ ）

输入 H, y, σ^2, K

输出 x

- 1) 初始化
 - 2) $A = H^H H + \sigma^2 I, b = H^H y$
 - 3) $X_0 = \alpha I // X_0$ 为迭代初始矩阵， α 为最优松弛因子， I 为 $K \times K$ 维单位矩阵。
 - 4) 迭代开始
 - 5) for $k = 1, \dots, n$ do
 - 6) $e_k = AX_k - I // e_k$ 为误差矩阵
 - 7) $\eta = \frac{1}{1 + \frac{\theta \text{trace}(e_k)}{K}}$ // θ 为调节因子， η 为步长因子
 - 8) $X_k = X_{k-1} - \eta X_{k-1} (AX_{k-1} - I)$
 - 9) end for
- $x = X_k b$

特别地，当调节因子 $\theta = 0$ 时，可对迭代公式进一步简化，通过避免 MMSE 矩阵计算进一步降低算法复杂度。基于 Newton 迭代算法的低复杂度信号检测（调节因子 $\theta = 0$ ）如算法 2 所示。

算法 2 基于 Newton 迭代算法的低复杂度信号检测（调节因子 $\theta = 0$ ）

输入 H, y, σ^2, K, N

输出 x

- 1) 初始化
- 2) $b = H^H y, \alpha = \frac{1}{N + K}$
- 3) $X_0 = \alpha I, V = \sigma^2 X_0, x^{(0)} = X_0 b // X_0$ 为迭代初始矩阵
- 4) 迭代开始
- 5) for $k = 1, \dots, n$ do
- 6) $x^{(k)} = x^{(k-1)} + (I - X_0 H^H H - V)^{2^{k-1}} x^{(k-1)}$
- 7) end for

$$x = x^{(n)}$$

算法 2 步骤 6) 中的迭代公式推导如下。

由于初始迭代矩阵 $X_0 = \alpha I$ ，基于式(6)，初次迭代可以写成

$$X_1 = X_0(2I_K - AX_0) = 2X_0 - X_0(X_0^{-1} + Q)X_0 = X_0 + (-X_0 Q)X_0 \quad (7)$$

其中， $Q = A - X_0^{-1}$ ，对应的估计信号为

$$x^{(1)} = X_0 b = x^{(0)} - (X_0 Q)x^{(0)} = x^{(0)} - (X_0 A - I)x^{(0)} = x^{(0)} + (I - X_0 H^H H - V)x^{(0)} \quad (8)$$

其中， $x^{(0)} = X_0 b$ 和 $V = \sigma^2 X_0$ 都是对角矩阵。利用经典 Newton 迭代公式（即式(6)）进行下一步迭代。

$$X_2 = X_1(2I - AX_1) = (X_0 - X_0 Q X_0)(2I - (X_0^{-1} + Q)(X_0 - X_0 Q X_0)) = X_1 + (-X_0 Q)^2 X_1 \quad (9)$$

此时有

$$x^{(2)} = X_2 b = x^{(1)} + (X_0 A - I)^2 x^{(1)} = x^{(1)} + ((X_0 H^H H + V)^2 - 2(X_0 H^H H + V) + I)x^{(1)} \quad (10)$$

类似地，可以推出 n 次迭代的结果（即步骤 6) 为

$$x^{(n)} = X_n b = (X_{n-1} + (-X_0 Q)^{2^n} X_{n-1})b = x^{(n-1)} + (I - X_0 H^H H - V)^{2^{n-1}} x^{(n-1)} \quad (11)$$

2.1 初始矩阵 X_0

由于 $A = H^H H + \sigma^2 I$ 是厄米特正定矩阵，该矩阵的上三角部分和下三角部分互为共轭对称矩阵，因此矩阵 A 又可写为

$$A = D - L - L^H \quad (12)$$

其中， D 是由 A 的主对角线元素构成的矩阵； $-L$ 是 A 的严格上三角部分；而 $-L^H$ 是 $-L$ 共轭转置后得到的，也就是 A 的严格下三角部分。

在迭代算法中，常用的矩阵求逆初值主要有 2 种，一种是 Jacobi 算法的初始值 $X_0 = D^{-1}$ ，另一种是 Richardson 算法的初始值 $X_0 = \alpha I$ 。当 MIMO 系统发送和接收天线的数量都变为无穷大时，根据随机矩阵理论，MMSE 检测算法滤波矩阵的最大和最小特征值将保持稳定并各自收敛到

$$\lambda_{\min}(A) = N \left(1 - \sqrt{\frac{K}{N}}\right)^2$$

$$\lambda_{\max}(A) = N \left(1 + \sqrt{\frac{K}{N}}\right)^2 \quad (13)$$

在这种情况下，信道硬化现象会变得异常明显，此时滤波矩阵的非对角线元素几乎可以忽略，即 \mathbf{A} 可以近似为对角线元素，此时有 $\mathbf{D} \approx \mathbf{A} = \mathbf{N}\mathbf{I}$ 。

结合 Jacobi 迭代检测算法的迭代矩阵

$$\mathbf{B}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^H) \quad (14)$$

可以得到如下形式的 Jacobi 算法迭代矩阵

$$\mathbf{B}_J = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^H) = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}}{N} \quad (15)$$

由式(13)和式(15)可以得到 \mathbf{B}_J 的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{B}_J) &= 1 - \left(1 + \sqrt{\frac{K}{N}}\right)^2 \\ \lambda_{\max}(\mathbf{B}_J) &= 1 - \left(1 - \sqrt{\frac{K}{N}}\right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

由此可以计算 \mathbf{B}_J 的谱半径为

$$\rho(\mathbf{B}_J) = \max|\lambda(\mathbf{B}_J)| = \left(1 + \sqrt{\frac{K}{N}}\right)^2 - 1 \quad (17)$$

同时，对于 Richardson 算法来说，其所对应的迭代矩阵的形式为

$$\mathbf{B}_R = \mathbf{I} - \alpha\mathbf{A} \quad (18)$$

最优松弛参数的值通常设置为

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \quad (19)$$

由式(18)和式(19)，并结合式(13)，可以将准最优松弛参数写成

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{A})} = \frac{1}{K + N} \quad (20)$$

由此可进一步得到 Richardson 算法迭代矩阵的谱半径为

$$\rho(\mathbf{B}_R) = \max|\lambda(\mathbf{B}_R)| = \frac{2N}{K + N} \sqrt{\frac{K}{N}} \quad (21)$$

对式(17)和式(21)进行对比分析可得

$$\rho(\mathbf{B}_R) < 2\sqrt{\frac{K}{N}} < 2\sqrt{\frac{K}{N}} + \frac{K}{N} = \rho(\mathbf{B}_J) \quad (22)$$

迭代算法中迭代矩阵的谱半径与算法收敛速度负相关^[10]，因此可得 Richardson 算法的收敛速度更快一些。

由于 Newton 迭代算法和其他迭代算法是正相关的，在迭代算法中，当初始矩阵为 $\mathbf{X}_0 = \alpha\mathbf{I}$ 时，

比 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{D}^{-1}$ 时收敛速度更快；相应地，在 Newton 迭代算法中，以 $\mathbf{X}_0 = \alpha\mathbf{I}$ 作为初始迭代矩阵也可以实现比以 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{D}^{-1}$ 作为初始迭代矩阵时更快的收敛速度。因此，本文选取 $\mathbf{X}_0 = \alpha\mathbf{I}$ 作为改进算法的初值。

2.2 步长因子 η

为了提升算法收敛速度，在初值改进基础上，将步长因子 η 加入 Newton 迭代公式中，从而得到

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \mathbf{X}_{k-1} - \eta\mathbf{X}_{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{I}) = \\ &= \mathbf{X}_{k-1} + \eta(\mathbf{I} - \mathbf{X}_{k-1}\mathbf{A})\mathbf{X}_{k-1} = \\ &= (1 + \eta)\mathbf{X}_{k-1} - \eta\mathbf{X}_{k-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} \end{aligned} \quad (23)$$

由于滤波矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma^2\mathbf{I}$ 是对称的，因此初始误差矩阵 $\mathbf{e}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{X}_0\mathbf{A}$ 也是对称的，通过递推也可以进一步证明矩阵 \mathbf{e}_k 是对称矩阵，且对于 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ 均成立。所以 \mathbf{e}_k 可以经由如下变换实现对角化

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{U}\mathbf{A}_k\mathbf{U}^H \quad (24)$$

其中，矩阵 \mathbf{U} 为典型酉矩阵，且 $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$ ， $\mathbf{A}_k \in \mathbb{C}^{N \times K}$ 为对角矩阵。

令对角矩阵表示为

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \eta(\mathbf{A}_k - \mathbf{A}_k^2) \quad (25)$$

则误差矩阵为

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{U}\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{U}^H \quad (26)$$

此处引用引理 1^[18-19]。

引理 1 对于满足等式 $\mathbf{U}^H\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^H = \mathbf{I}$ 和 $\mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}$ 的酉矩阵 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} ，给定一个非奇异矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{K \times K}$ ，可以得到

$$\|\mathbf{U}\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{V}\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}\|_2 \quad (27)$$

误差矩阵必须满足 $\|\mathbf{e}_{k+1}\|_2 \leq \|\mathbf{e}_k\|_2$ ，才能保证 Newton 迭代算法的收敛，根据引理 1 可得

$$\|\mathbf{U}\mathbf{A}_{k+1}\mathbf{U}^H\|_2 = \|\mathbf{e}_{k+1}\|_2 \leq \|\mathbf{e}_k\|_2 = \|\mathbf{U}\mathbf{A}_k\mathbf{U}^H\|_2 \quad (28)$$

从而有

$$\|\mathbf{A}_{k+1}\|_2 \leq \|\mathbf{A}_k\|_2 \quad (29)$$

这样一来，对于 \mathbf{e}_k 的收敛性讨论就可以转变成针对 \mathbf{A}_k 的研究。

令对角矩阵 $\mathbf{A}_k := \text{diag}(\xi_{1,k}, \dots, \xi_{i,k}, \dots, \xi_{n,N_i})$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, K$ ，根据式(25)有

$$\xi_{i,k+1} = \xi_{i,k} - \eta(\xi_{i,k} - \xi_{i,k}^2) \quad (30)$$

算法要收敛，必须使 $\|I - X_0 A\|_2 < 1$ ，即要求 $-1 < \xi_{i,0} < 1$ ， $i=1,2,\dots,K$ 。同时还需要 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = 0$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$ ，即

$$|\xi_{i,k+1}| = |\xi_{i,k} - \eta(\xi_{i,k} - \xi_{i,k}^2)| < |\xi_{i,k}| \quad (31)$$

根据迭代算法的收敛性，结合式(31)可知， $-1 < \xi_{i,0} < 1$ ， $\eta > 0$ ，从而得到步长因子 η 应满足

$$0 < \eta < \frac{2}{1 - \xi_{i,k}}, \quad -1 < \xi_{i,0} < 1, \quad \forall i=1,2,\dots,K \quad (32)$$

由式(30)可知，当矩阵元素 $\xi_{i,k+1}$ 为 0 时，步长因子达到最佳值，即

$$\eta = \frac{1}{1 - \xi_{i,k}} \quad (33)$$

将对角矩阵元素取平均值，表示为 $\bar{\xi}$ ，即 $\bar{\xi} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N \xi_{i,k}$ ，可以得到改进算法步长因子的最佳取值为

$$\eta_{opt} = \frac{1}{1 - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^N \xi_{i,k}} = \frac{1}{1 - \bar{\xi}} \quad (34)$$

2.3 调节因子 θ

根据凸优化理论，如果步长过大，可能会错过极值点，导致式(29)不成立。为了使算法更加稳定，在式(34)中加入调节因子 θ ，即

$$\eta_{opt} = \frac{1}{1 - \theta \bar{\xi}} \quad (35)$$

其中， θ 与 $\xi_{i,k}$ 的分布密切相关。

图 2 给出了 $X_0 = \alpha I$ 时不同 θ 值对步长的影响。从图 2 中可以看出，迭代初始阶段， θ 越大，步长越大，尤其当 θ 接近 1.0 时，很容易出现不收敛的情况。综上，这里设置 $\theta=0.8$ ，既保证了算法的稳定性，又加速了算法收敛。

3 算法复杂度分析

3.1 初始化部分计算复杂度

表 1 为本文算法与 Newton 迭代算法初始化部分计算复杂度比较。从表 1 可以看出，本文算法（算法 1 和算法 2）极大降低了初始化部分的计算复杂度。

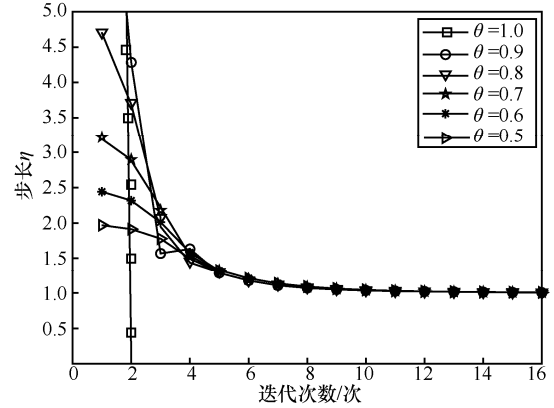


图 2 $X_0 = \alpha I$ 时不同 θ 值对步长的影响

表 1 本文算法与 Newton 迭代算法初始化部分计算复杂度比较

| 算法 | 初始化复杂度 |
|-------------|-----------------|
| 算法 1 | $NK + K$ |
| 算法 2 | $NK + 3K$ |
| Newton 迭代算法 | $NK^2 + NK + K$ |

1) 算法 1 初始化部分复杂度

算法 1 中，可以很容易地计算出 $b = H^H y$ 的计算复杂度为 NK ， X_0 的计算复杂度为 K ，所以算法 1 总的计算复杂度为 $NK + K$ 。

2) 算法 2 初始化部分的复杂度

算法 2 中，可以很容易地计算出 $b = H^H y$ 的计算复杂度为 NK ， X_0 、 V 、 $x^{(0)}$ 的计算复杂度分别为 K ，所以算法 2 总的计算复杂度为 $NK + 3K$ 。

3) Newton 迭代算法初始化部分复杂度

对于 Newton 迭代算法的初始化部分，涉及获取 D^{-1} 和 $b = H^H y$ 的计算。获取 D^{-1} 的计算复杂度为 $NK^2 + K$ ，加上 $H^H y$ 部分的计算复杂度，总计算复杂度为 $NK^2 + NK + K$ 。

3.2 迭代过程计算复杂度

表 2 为本文算法与 Newton 迭代算法迭代过程复杂度比较。

表 2 本文算法与 Newton 迭代算法迭代过程复杂度比较

| 迭代次数 | 算法 1 | 算法 2 | Newton 迭代算法 |
|------|-------------------------|--------|-----------------|
| 1 | $K^2(N+2) + K(N+1)$ | $3NK$ | $NK^2 + NK$ |
| 2 | $K^2(3N+4) + K(N+2)$ | $7NK$ | $3NK^2 + NK$ |
| 3 | $K^2(7N+6) + K(7N+3)$ | $15NK$ | $7NK^2 + 7NK$ |
| 4 | $K^2(15N+8) + K(15N+4)$ | $31NK$ | $15NK^2 + 15NK$ |

从表 2 可以看出，在算法 1 中，步长因子加快了收敛速度，但是无法避免滤波矩阵 A 的计算，故

相比算法 2，算法 1 复杂度更高一些。但是，相比 Newton 迭代算法，算法 1 复杂度还是有所降低。

与 Newton 迭代算法相比，算法 1 由于引入了步长因子 η ，因此产生了对角矩阵和矩阵之间乘法与运算 $\mathbf{X}_k \mathbf{A}$ ，复杂度为 K^2 ；矩阵求迹运算 $\text{trace}(\mathbf{e}_k)$ ，复杂度为 K ；迭代公式 $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k-1} - \eta \mathbf{X}_{k-1} (\mathbf{A} \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{I})$ 中引入 η ，增加了常数与矩阵的乘法运算 $\eta (\mathbf{X}_{k-1} (\mathbf{A} \mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{I}))$ ，复杂度为 K^2 ，因此，算法 1 每次迭代相比 Newton 迭代算法增加 $2K^2 + K$ 的运算量。

算法 2 在迭代过程中，首先需要计算 $\mathbf{X}_0 \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{x}^{(0)}$ 和 $\mathbf{V} \mathbf{x}^{(0)}$ 的计算复杂度，分别是 $2NK + K$ 和 K 。由于 $(\mathbf{I} - \mathbf{X}_0 \mathbf{H}^H \mathbf{H} - \mathbf{V}) \mathbf{x}^{(0)}$ 是一个向量，因此，第 n 次 Newton 迭代需要 $(2^{n+1} - 1)(NK + K)$ 的计算复杂度。

3.3 算法整体过程复杂度

本文算法（算法 1 和算法 2）、Newton 迭代算法、基于 Neumann 级数展开的算法、文献[14]算法的总复杂度比较如表 3 所示。

本文以 32×256 MIMO 系统为例，本文算法（算法 1 和算法 2）以及 Newton 迭代算法所需要的初始化部分的计算复杂度分别为 $257K$ 、 $259K$ 、 $256K^2 + 257K$ 。为了逼近 MMSE 算法性能，三者迭代次数依次设为 3 次、4 次、4 次，迭代过程中的计算复杂度依次为 $1798K^2 + 1795K$ 、 $7936NK$ 、 $3840K^2 + 3840K$ ，故总的计算复杂度依次为 $1795K^2 + 2052K$ 、 $8195K$ 、 $4096K^2 + 4097K$ 。基于 Neumann 级数展开的算法至少需要 7 次迭代才能接近 MMSE 算法的性能，但此时计算复杂度就已经达到了 $5K^3 + 256K^2 + 256K$ ，复杂度达到了 $O(K^3)$ 的级别。文献[14]算法需要 8 次迭代才能接近 MMSE 算法性能，所需计算复杂度为 $2048K$ 。可以看出，算法 2 相比算法 1 以及 Newton 迭代算法，在复杂度上降低了一个数量级，只有 $O(K)$ 级别，与文献[14]算法属于同一个数量级。算法 1 因

为初值的改进以及收敛速度的提升，相比 Newton 迭代算法复杂度降低很多，但因为加入了步长因子，无法像算法 2 那样将滤波矩阵 \mathbf{A} 进行分解，并充分利用不同迭代次数间的递推规律求解第 k 次迭代的结果，相比算法 2 仍具有较高的复杂度，但却有更快的收敛速度。故本文算法可分别用于不同需求的场景。

另外，当发送和接收天线数目为 64×1024 时，类似地，同样可以计算出算法 1、算法 2 以及 Newton 迭代算法所需的计算复杂度分别为 $7174K^2 + 8196K$ 、 $32771K$ 、 $16384K^2 + 16385K$ 。此种情况下，基于 Neumann 级数展开的方法的复杂度为 $5K^3 + 1024K^2 + 1024K$ ，文献[14]算法的复杂度为 $8192K$ 。所得结论与之前一致。

4 仿真分析

仿真参数设置如下：调制方式为 64QAM，信道为快衰落瑞利信道，占用太赫兹频段。系统利用大型天线阵列分组和控制技术，将超大规模天线阵列拆分成若干小组，每一小组天线规模为 32×256 。

图 3 首先对比了初始值为 1 的 Newton 迭代算法与初始值为 2 的 Newton 迭代算法的检测误差。初始值为 1 则 $\mathbf{X}_0 = \alpha \mathbf{I}$ ，初始值为 2 则 $\mathbf{X}_0 = \mathbf{D}^{-1}$ 。由图 3 可知，改进初始值不仅可以使计算复杂度降低，还可以在一定程度上加快算法的收敛速度。另外，图 3 也对 Newton 迭代算法与算法 1 在 2 种初始值情况下的收敛速度进行了比较。从图 3 中可以明显地看出，无论初始值如何选取，加入步长因子都可以使收敛速度加快。

图 4 给出了本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、Newton 迭代算法、MMSE 检测算法的误比特率性能。从图 4 可以看出，文献[14]算法需要 8 次迭代才能逼近 MMSE 算法的检测性能，而算法 1 和算法 2 分别需要 3 次和 4 次迭代即可接近 MMSE 算法。Newton 迭代算法需要 4 次迭代即可逼近 MMSE 算法，但其计算复杂度较高。总之，本文算法（算法 1 和算法 2）计算复杂度均小于 Newton

表 3 本文算法与其他几种算法的总复杂度比较

| 迭代次数 | 算法 1 | 算法 2 | Newton 迭代算法 | 基于 Neumann 级数展开的算法 | 文献[14]算法 |
|------|-------------------------|-------------|---------------------|--------------------|----------|
| 1 | $(N+2)K^2 + (2N+2)K$ | $4NK + 3K$ | $2NK^2 + 2NK + K$ | $4NK$ | NK |
| 2 | $(3N+4)K^2 + (2N+3)K$ | $8NK + 3K$ | $4NK^2 + 2NK + K$ | $NK^2 + NK$ | $2NK$ |
| 3 | $(7N+6)K^2 + 4(2N+1)K$ | $16NK + 3K$ | $8NK^2 + 8NK + K$ | $K^3 + NK^2 + NK$ | $3NK$ |
| 4 | $(15N+8)K^2 + (16N+5)K$ | $32NK + 3K$ | $16NK^2 + 16NK + K$ | $2K^3 + NK^2 + NK$ | $4NK$ |

迭代算法，尤其是算法 2 的计算复杂度比 Newton 迭代算法小了一个数量级。

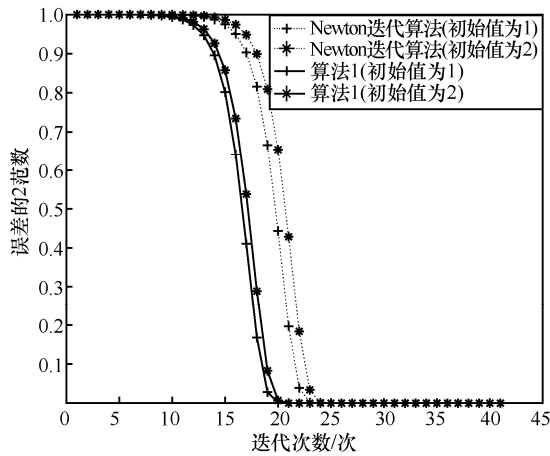


图 3 Newton 迭代算法与算法 1 在 2 种初始值的情况下收敛速度的比较

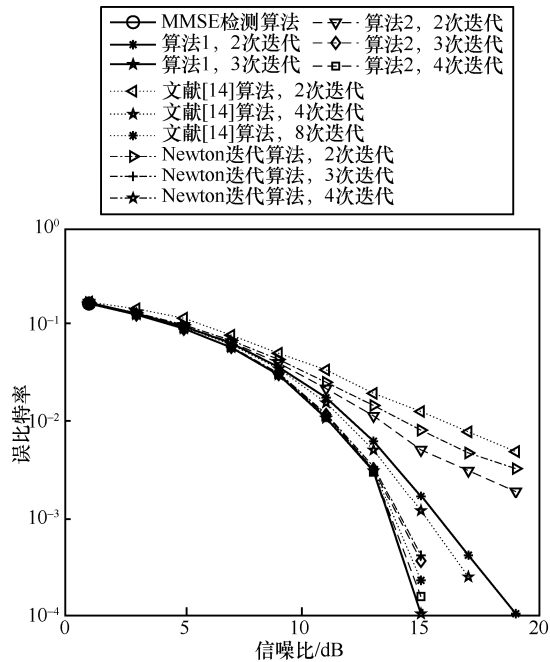


图 4 本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、Newton 迭代算法、MMSE 检测算法的误比特率性能

图 5 给出了本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、Newton 迭代算法、MMSE 检测算法在天线规模为 64×1024 时的误比特率性能曲线。从图 5 可以明显看出，本文算法仍保持优越性。

图 6 给出了本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、基于 Neumann 级数展开的算法、MMSE 检测算法在天线规模为 32×256 时的误比特率性能曲线。从图 6 可以看出，本文算法的收敛速度优于基于 Neumann 级数展开的算法以及文献[14]算法；在相同迭代次数下，本文算法误码率曲线远优于基于

Neumann 级数展开的算法以及文献[14]算法；在算法复杂度方面，本文算法远低于基于 Neumann 级数展开的算法。

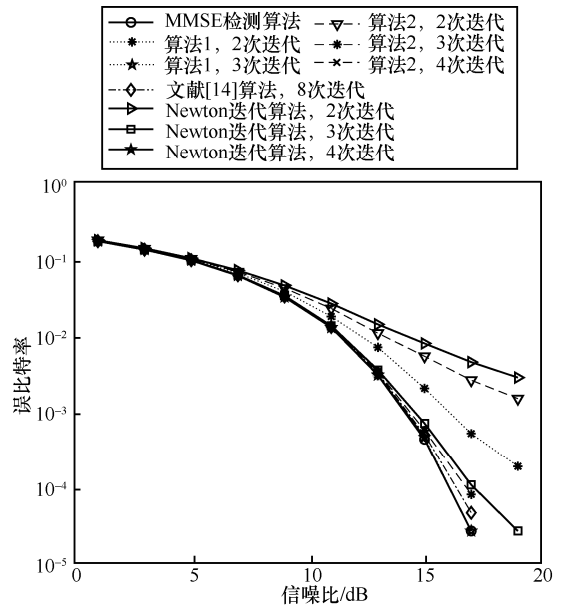


图 5 本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、Newton 迭代算法、MMSE 检测算法在天线规模为 64×1024 时的误比特率性能曲线

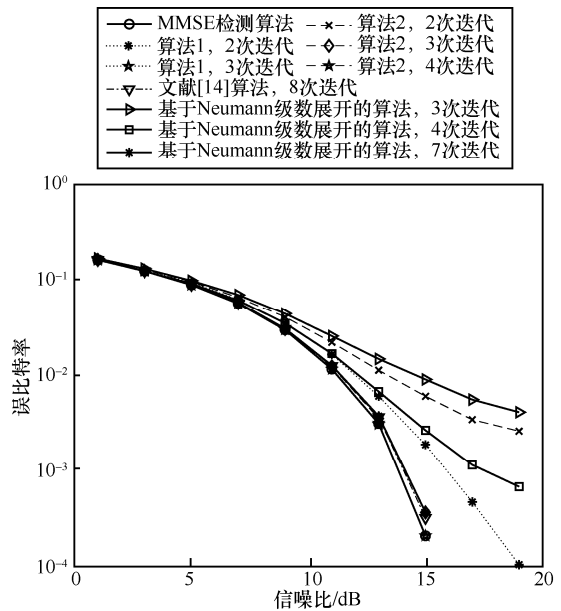


图 6 本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、基于 Neumann 级数展开的算法、MMSE 检测算法在天线规模为 32×256 时的误比特率性能曲线

图 7 给出了本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、基于 Neumann 级数展开的算法、MMSE 检测算法在天线规模为 64×1024 时的误比特率性能曲线。从图 7 可以看出，本文算法仍保持了较好的检测性能。

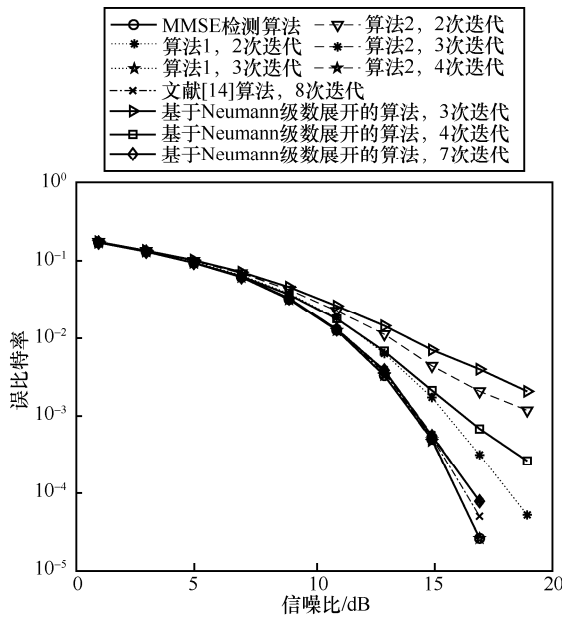


图 7 本文算法（算法 1 和算法 2）、文献[14]算法、基于 Neumann 级数展开的算法、MMSE 检测算法在天线规模为 64×1024 时的误比特率性能曲线

5 结束语

为了解决 6G 太赫兹频段下超大规模 MIMO 系统信号检测复杂度高、收敛速度慢等问题，本文基于 Newton 迭代算法，提出了一种低复杂度的信号检测算法。该算法通过改进初始迭代矩阵，加入迭代步长因子，加快了算法收敛速度；通过加入调节因子，提高了算法可靠性与稳定性。对于数据量大、实时性要求不高的场景，可令调节因子 $\theta=0$ ，避免了迭代过程滤波矩阵 A 的计算，进一步降低了计算复杂度，达到了 $O(K)$ 级别。仿真结果表明，相比目前广泛应用的 Newton 迭代算法和基于 Neumann 级数展开的算法，本文算法拥有更快的收敛速度、更好的检测性能和更低的算法复杂度；相比文献[14]算法，本文算法拥有更快的收敛速度。

参考文献：

[1] 谢莎, 李浩然, 李玲香, 等. 太赫兹通信技术综述[J]. 通信学报, 2020, 41(5): 168-186.
XIE S, LI H R, LI L X, et al. Survey of terahertz communication technology[J]. Journal on Communications, 2020, 41(5): 168-186.

[2] 张平, 牛凯, 田辉, 等. 6G 移动通信技术展望[J]. 通信学报, 2019, 40(1): 141-148.
ZHANG P, NIU K, TIAN H, et al. Technology prospect of 6G mobile communications[J]. Journal on Communications, 2019, 40(1): 141-148.

[3] 卢安安, 高西奇. 大规模 MIMO 传输技术研究及展望[J]. 中国科学基金, 2020, 34(2): 186-192.
LU A A, GAO X Q. Prospects and overview of massive MIMO transmission[J]. Bulletin of National Natural Science Foundation of China, 2020, 34(2): 186-192.

[4] HAN C, WU Y Z, CHEN Z, et al. Terahertz communications (TeraCom): challenges and impact on 6G wireless systems[J]. arXiv Preprint, arXiv:1912.06040, 2019.

[5] 钱志鸿, 肖琳, 王雪. 面向未来移动网络密集连接的关键技术综述[J]. 通信学报, 2021, 42(4): 22-43.
QIAN Z H, XIAO L, WANG X. Review on strategic technology of dense connection for the future mobile network[J]. Journal on Communications, 2021, 42(4): 22-43.

[6] JIANG F, LI C, GONG Z J. A low complexity soft-output data detection scheme based on Jacobi method for massive MIMO uplink transmission[C]//Proceedings of 2017 IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE Press, 2017: 1-5.

[7] GAO X Y, DAI L L, YUEN C, et al. Low-complexity MMSE signal detection based on Richardson method for large-scale MIMO systems[C]//Proceedings of 2014 IEEE 80th Vehicular Technology Conference. Piscataway: IEEE Press, 2014: 1-5.

[8] BAKULIN M, REJEB T B, KREYNDELIN V, et al. Low-complexity iterative detector for massive MIMO systems[C]//Proceedings of 2021 28th Conference of Open Innovations Association (FRUCT). Piscataway: IEEE Press, 2021: 22-27.

[9] ZHU D K, LI B Y, LIANG P. On the matrix inversion approximation based on Neumann series in massive MIMO systems[C]//Proceedings of 2015 IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE Press, 2015: 1763-1769.

[10] BJÖRCK Å. Numerical methods in matrix computations[M]. Cham: Springer International Publishing, 2015.

[11] GAO X Y, DAI L L, HU Y T, et al. Matrix inversion-less signal detection using SOR method for uplink large-scale MIMO systems[C]//Proceedings of 2014 IEEE Global Communications Conference. Piscataway: IEEE Press, 2014: 3291-3295.

[12] ZHANG H B, PENG G Q, LIU L B. Low complexity signal detector based on Lanczos method for large-scale MIMO systems[C]//Proceedings of 2016 6th International Conference on Electronics Information and Emergency Communication (ICEIEC). Piscataway: IEEE Press, 2016: 6-9.

[13] JIN F L, LIU Q F, LIU H, et al. A low complexity signal detection scheme based on improved Newton iteration for massive MIMO systems[J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(4): 748-751.

[14] CHATAUT R, AKL R. Efficient and low complex uplink detection for 5G massive MIMO systems[C]//Proceedings of 2018 IEEE 19th Wireless and Microwave Technology Conference. Piscataway: IEEE Press, 2018: 1-6.

- [15] 李航伟, 唐加山. 大规模 MIMO 系统改进 MMSE 信号检测算法[J]. 软件导刊, 2019, 18(3): 70-72, 77.
LI H W, TANG J S. Improved MMSE signal detection algorithm for massive MIMO systems[J]. Software Guide, 2019, 18(3): 70-72, 77.
- [16] TANG C, LIU C, YUAN L C, et al. High precision low complexity matrix inversion based on Newton iteration for data detection in the massive MIMO[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(3): 490-493.
- [17] LARSSON E G, EDFORS O, TUFVESSON F, et al. Massive MIMO for next generation wireless systems[J]. IEEE Communications Magazine, 2014, 52(2): 186-195.
- [18] HORN R A, JOHNSON C R. Matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [19] GOLUB G H, LOAN C. Matrix computations[M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.



姜增进 (1998-), 男, 山东潍坊人, 西安电子科技大学硕士生, 主要研究方向为宽带无线传输、大规模 MIMO 检测等。



林勤华 (1994-), 女, 山东威海人, 西安电子科技大学硕士生, 主要研究方向为 MIMO 检测技术。

[作者简介]



刘刚 (1977-), 男, 陕西三原人, 博士, 西安电子科技大学副教授, 主要研究方向为宽带无线传输技术。



郭漪 (1977-), 女, 陕西榆林人, 博士, 西安电子科技大学副教授, 主要研究方向为 B5G/6G 智能传输关键技术。